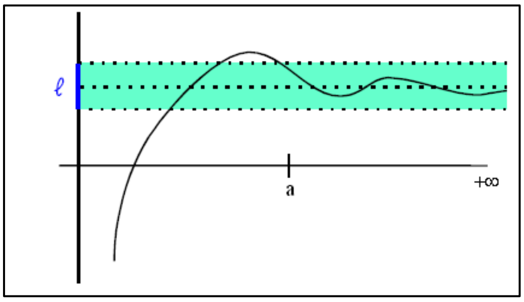
النهـايـات

I. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ و $-\infty$:

1. نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$:

لتكن f دالة معرفة على مجال يشمل المجال المفتوح $]a;+\infty[$ و l عدد حقيقي.

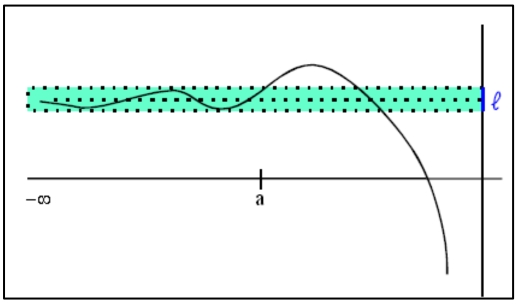
إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل فـي نفـس الوقت f(x) من أجل x كبير بقدر كاف، نقول عن الدالة f أنها تؤول إلى العدد الحقيقي l عندما يـؤول x إلـى $+\infty$، ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.



2. نهاية منتهية لدالة عند $-\infty$:

لتكن f دالة معرفة على مجال يشمل المجال المفتوح $]-\infty;a[$ و l عدد حقيقي.

إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل فـي نفـس الوقت f(x) من أجل x صغير بقدر كاف، نقـول عـن الدالة f أنها تؤول إلى العدد الحقيقي l عندما يـؤول x إلى $-\infty$، ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.



3. نتيجة:

- القول أن الدالة f تقبل النهاية l عند ∞ يعني أن f(x) تقترب من l عندما نأخذ x كبيرا (صـغيـرا) بقـدر كاف.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ تعني أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته: $y=l$ عند ∞ .

4. أمثلة:

- لتكن $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{-x^2-5x+1}$، بين أن المستقيم الذي معادلته y = -2 مستقيم مقارب أفقي لـ f(x) عند $+\infty$.
- لتكن $g(x)=\dfrac{-3x+5}{x+1}$، بين أن المستقيم الذي معادلته y = -3 مستقيم مقارب أفقي لـ g(x) عند $-\infty$.

الحل:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{-x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{-x^2}=-2$

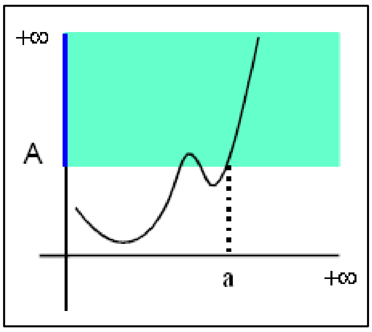
ومنه فإن المستقيم الذي معادلته y=-2 مستقيم مقارب أفقي لـ f(x) عند $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+5}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{x}=-3$

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته y=-3 مستقيم مقارب أفقي لـ g(x) عند $-\infty$.

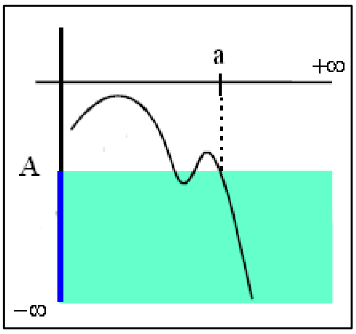
II. نهاية غير منتهية لدالة عند $+\infty$ و $-\infty$:

1. تعريف 1:



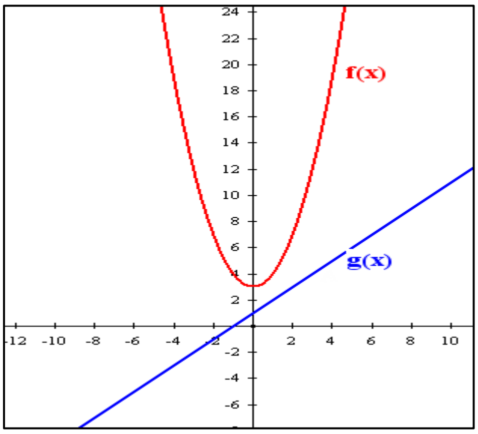
لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;+\infty[$. القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي، ونكتب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2. تعريف 2:



لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;+\infty[$. القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $-\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;A[$ (مع A عدد حقيقي) يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي، ونكتب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

3. أمثلة:



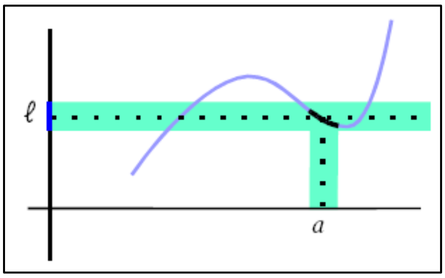
لتكن $f(x)=x^2+3$ و $g(x)=x+1$، أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

الحل:

- ❖ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+3=+\infty$.
- ❖ $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x+1=-\infty$.

III. نهاية منتهية لدالة عند عدد حقيقي:

1. تعريف:



لتكن f دالة معرفة على مجال يشمل المجال $]a;a+r[$ (أو $]a-r;a[$) حيث r عدد حقيقي موجب، وليكن l عددا حقيقيا.
إذا كان كل مجال مفتوح يشمل l يشمل في نفس الوقت كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بقدر كاف من a، نقول أن الدالة f تقبل نهاية منتهية l عند a، ونكتب: $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

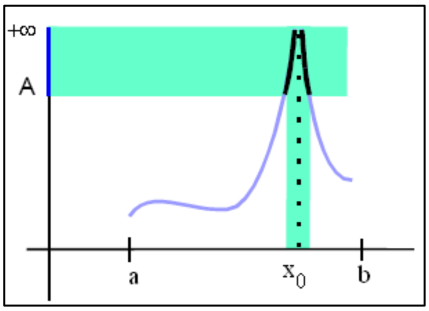
2. مثال:

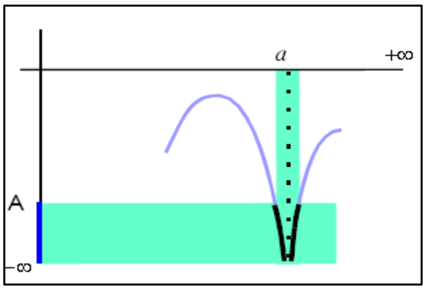
لتكن $f(x)=x^2+3$، أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$.

الحل: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x^2+3=3$، نقول أن f تقبل نهاية منتهية هي 3 عند 0.

IV. نهاية غير منتهية لدالة عند عدد حقيقي:

1. تعريف:





f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$ و A عدد حقيقي.

❖ نقول أن نهاية الدالة f عند العدد x_0 هي $+\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]A;+\infty[$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بقدر كاف من x_0، ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

❖ نقول أن نهاية الدالة f عند العدد x_0 هي $-\infty$، يعني أن كل مجال من الشكل $]-\infty;A[$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بقدر كاف من x_0، ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

2. نتيجة:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ تعني أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x=x_0$ عند ∞.

3. مثال:

لتكن $f(x)=\frac{1}{x^2}$، بين أن المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ f(x).

الحل: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >\\ <}}\frac{1}{x^2}=+\infty$ (لأن مربع كل عدد حقيقي هو عدد موجب) ومنه فإن المستقيم الـذي معادلته x=0 مستقيم مقارب عمودي لـ f(x).

V. نهاية غير منتهية لدالة عن يمين وعن يسار عدد حقيقي:

1. التعريف:

f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$.

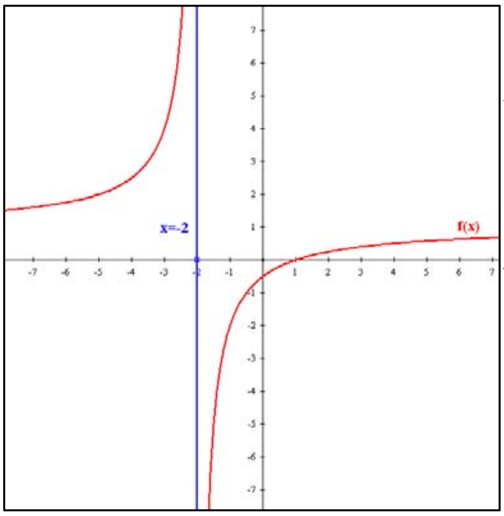
❖ عندما نأخذ بعين الاعتبار قيم x التي تنتمي إلى $]a;x_0[$، نتحدث عن نهاية الدالة f عن يسار العـدد x_0 ، ونكتب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}x_0} f(x)$.

❖ عندما نأخذ بعين الاعتبار قيم x التي تنتمي إلى $]x_0;b[$، نتحدث عن نهاية الدالة f عن يمين العـدد x_0 ، ونكتب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}x_0} f(x)$.

2. مثال:

لتكن $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$، بين أن المستقيم الذي معادلته x = -2 مستقيم مقارب عمودي لـ f(x).

الحل:



❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \dfrac{x-1}{x+2} = -\infty$

لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} x-1 = -3$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} x+2 = 0^+$.

❖ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} \dfrac{x-1}{x+2} = +\infty$

لأن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} x-1 = -3$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} x+2 = 0^-$.

ومنه فإن المستقيم الذي معادلته x=-2 مستقيم مقارب عمودي لـ $f(x)$.

VI. المستقيمات المقاربة والفروع اللانهائية:

❖ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ تعني أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته: $y = 1$ عند ∞ .

❖ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ تعني أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x = x_0$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ، نحسب $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ يعني يوجد فرع لانهائي لقطع مكافئ في اتجاه (yy')
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ يعني يوجد فرع لانهائي لقطع مكافئ في اتجاه (xx')
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ ، نحسب $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax]$
  - $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \infty$ ، يوجد فرع لانهائي في اتجاه المستقيم الذي معادلته $y=ax$.
  - $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$ ، مع $b \in \mathbb{R}$ يعني يوجد مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$.

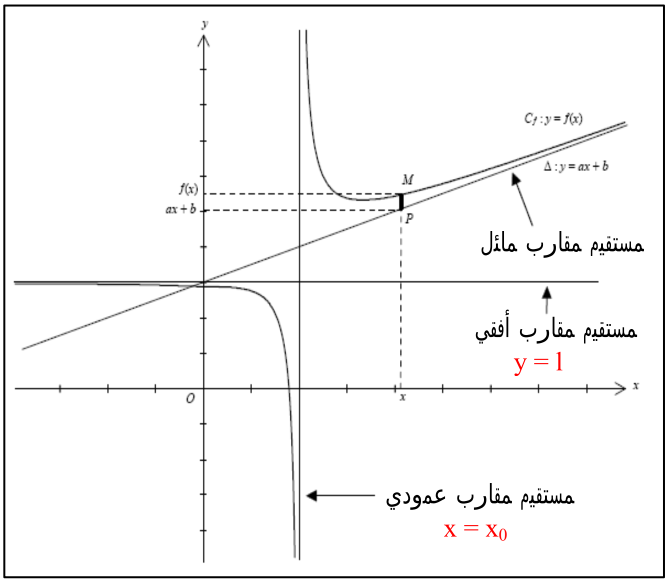
ملاحظات:

❖ $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ تعني أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$.

❖ إذا كانت f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ ، فإن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) الممثل للدالة f.

❖ لدراسة وضعية (C_f) المنحنى الممثل للدالة f بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته: y=ax+b، ندرس إشارة الفرق: $[f(x) - ax + b]$:

- $[f(x) - ax + b] < 0$ معناه أن (C_f) يقع تحت (d).
- $[f(x) - ax + b] > 0$ معناه أن (C_f) يقع فوق (d).



VII. عمليات على الدوال وحالات عدم التعيين:

لما تكون للدالتين f وg نهايات معروفة، نستطيع بصفة عامة استنتاج نهاية الدوال: $f+g,\ f\times g,\ \frac{f}{g}$ بسهولة. النهايات مأخوذة عند ∞ أو عدد حقيقي x_0، كما أن a وa' عددان حقيقيان.

1. نهاية مجموع دالتين:

إذا كانت نهاية f	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
إذا كانت نهاية g	a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
فإن نهاية f+g	a+a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت

2. نهاية جداء دالتين:

إذا كانت نهاية f	a	a>0	a>0	a<0	a<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	a'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
فإن نهاية f×g	a×a'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

3. نهاية حاصل قسمة دالتين:

أ. حالة نهاية الدالة g غير معدومة:

إذا كانت نهاية f	a	a	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
إذا كانت نهاية g	$a'\neq 0$	∞	a'>0	a'<0	a'>0	a'<0	∞
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{a}{a'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

ب. حالة نهاية الدالة g معدومة:

إذا كانت نهاية f	a>0 أو $+\infty$	a>0 أو $+\infty$	a<0 أو $-\infty$	a<0 أو $-\infty$	0
إذا كانت نهاية g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
فإن نهاية $\frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت

4. حالات عدم التعيين:

مما سبق يمكننا أن نلخص هذه الحالات فيما يلي:

$0\times\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$+\infty-\infty$

❖ لإزالة حالة عدم التعيين، نتبع إحدى الطرق التالية:

- الاختزال.
- التحليل.
- المرافق.
- العدد المشتق.

www.mathonec.com

VIII. نهايات بعض الدوال:

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{x}=-\infty$ ، $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0$.

❖ النهاية عند ∞ لدالة كثيرة حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند ∞.

❖ النهاية عند ∞ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند ∞.

❖ f دالة مركبة من دالتين v و u أي $f=v\circ u$، و a، b، c أعداد حقيقية (منتهية أو غيـر منتهيـة)، إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to b} v(X)=c$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$.

1. أمثلة:

أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x+1$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3}$.

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x-1}{x-1}}=\sqrt{2}$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to2} \sqrt{x}=\sqrt{2}$.

IX. النهايات والحصر:

1. الحصر عند نهاية منتهية:

أ. التعريف:

f, g, h دوال عددية معرفة على المجال I، و l عدد حقيقي

❖ إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=l$ ، وكانت $g(x)\le f(x)\le h(x)$ من أجل كل x من I،

فإن: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$.

ب. مثال:

برهن أنه عندما: $x>-1$ فإن: $\frac{1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{-1}{x+1}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1}$.

❖ $x>-1$ ومنه فإن: $x+1>0$ ، كما أن: $-1<\cos x<1$ ، ومنه فإن: $\frac{1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{-1}{x+1}$.

❖ بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}=0$ ، فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x+1}=0$.

2. الحصر عند نهاية غير منتهية:

أ. التعريف:

g, f دالتان عدديتان معرفتان على المجال I، وa عدد حقيقي

- إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$ ومهما يكن x من I فإن $f(x)\geq g(x)$، فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.
- إذا كانت: $\lim_{x\to\infty} g(x)=-\infty$ ومهما يكن x من I فإن $f(x)\leq g(x)$، فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

ب. مثال:

لتكن $f(x)=x+\sin x$ أحسب $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $-1\leq \sin x\leq 1$، ومنه فإن: $-1+x\leq x+\sin x\leq 1+x$ أي $-1+x\leq f(x)\leq 1+x$.
- بما أن: $\lim_{x\to-\infty} (1+x)=-\infty$ و $f(x)\leq 1+x$ ، فإن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
- بما أن: $\lim_{x\to+\infty} (-1+x)=+\infty$ و $-1+x\leq f(x)$ ، فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

www.mathonec.com